Operatory na kratach Banacha
Lista 3 (własności modułu i porządkowa zupełność)

Zad 1. Pokazać, że w kracie wektorowej X dla dowolnych $x, y, z, u, v \in X$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $x + y = x \vee y + x \wedge y$

(2) $x = x_+ - x_-$ oraz $|x| = x_+ + x_-$, przy czym x_+, x_- dodatnie i rozłączne

(3) jeśli $x = u - v$ gdzie u, v dodatnie i rozłączne, to $u = x_+$ oraz $v = x_-$

(4) $\lambda \geq 0 \Longrightarrow (\lambda x) \vee (\lambda y) = \lambda(x \vee y)$ oraz $(\lambda x) \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y)$

(5) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $|\lambda x| = |\lambda||x|$ oraz $|x + y| \leq |x| + |y|$

(6) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$

(7) $|x - y| = |x \vee z - z \vee y| + |x \wedge z - z \wedge y|$

(8) $|x \vee y - u \vee v| \leq |x - u| + |y - v|$ oraz $|x \wedge y - u \wedge v| \leq |x - u| + |y - v|$

(9) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x + y|)$ oraz $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x + y|)$

(10) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$

(11) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\big||x + y| - |x - y|\big|$ i w szczególności $x \perp y \Longleftrightarrow |x + y| = |x - y|$

(12) $x \perp y \Longleftrightarrow |x| \vee |y| = |x| + |y|$

(13) $x \leq y \Longleftrightarrow x_+ \leq y_+$ and $y_- \leq x_-$

(14) $0 \leq x, y \Longrightarrow [0, x] + [0, y] = [0, x + y]$

(15) $x \leq y$ oraz $u \leq v \Longrightarrow [x, y] + [u, v] = [x + u, y + v]$

(16) $x, y, z \geq 0 \Longrightarrow (x + y) \wedge z \leq x \wedge z + y \wedge z$

(17) $x \perp y \Longrightarrow (x + y)_\pm = x_\pm + y_\pm$ oraz $|x + y| = |x| + |y|$

Zad 2. Pokazać, że stożek X_+ w przestrzeni wektorowej X zadaje na niej strukturę kraty wektorową wtedy i tylko wtedy, gdy $X = X_+ - X_+$ oraz dla wszystkich $x, y \in X_+$ istnieje $x \vee y$.

Zad 3. Pokazać, że na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z porządkiem leksykograficznym nie istnieje norma kratowa.

Zad 4. Pokazać, że każda niezerowa uporządkowana liniowo archimedesowa krata wektorowa jest jednowymiarowa, tzn. izomorficzna z $\mathbb{R}$.

Zad 5. Pokazać, że krata Banacha $C[0, 1]$ funkcji ciągłych, ze standardową strukturą, nie jest przeliczalnie porządkowo zupełna (istnieją ciągi porządkowo ograniczone nie posiadające inf lub sup)

Zad 6. Pokazać, że przestrzeń $C^1[0, 1]$ funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły wraz z porządkiem

$$x \leq y \iff x(0) \leq y(0) \text{ oraz } x'(t) \leq y'(t) \text{ dla } t \in [0, 1]$$

oraz normą $\|x\| = |x(0)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$ jest kratą Banacha. Czy jest przestrzeń porządkowo zupełna?

Zad 7. Pokazać, że kraty Banacha ℓ^p, dla $p \in [1, \infty]$, oraz c_0 są porządkowo zupełne.

Zad 8. Pokazać, że krata Banacha $L^p_\mu(\Omega)$, dla $p \in [1, \infty]$ jest przeliczalnie porządkowo zupełna.

Zad 9. Pokazać, że przestrzrzeń $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ miar znakowych na ustalonej przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ) wraz z działaniami określonymi punktowo, tzn. $(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A)$, $(\lambda\mu)(A) := \lambda\mu(A)$ oraz

$$\mu \leq \nu \iff \mu(A) \leq \nu(A) \text{ dla każdego } A \in \Sigma.$$

jest kratą wektorową. Zinterpretować rozkład $\mu = \mu_+ - \mu_-$ oraz miarę $|\mu|$. Pokazać, że $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ jest kratą Banacha z normą $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$. Czy ta krata jest porządkowo zupełna?